環境設備原論（第 11 回目）［木曜日・14:30〜16:00・小講義室２］

2003.12.11

環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

補足：

参考文献（〔〕内は，熊本県立大学附属図書館所蔵情報）

［１］『数学の風景が見える　微分・積分の意味がわかる』（野崎昭宏・何森仁・伊藤潤一・小沢健一，ベレ出版，￥1,470，ISBN：4-939076-49-0）〔所蔵なし〕

［２］『事例で学ぶ　工業数学の基礎』（相良紘，日刊工業新聞社，￥2,835，ISBN：4-526-04821-6）〔所蔵なし〕

［３］『ブルーバックス B1003 マンガ　微積分入門』（岡部恒治，1994 年２月，講談社，￥980，ISBN：4-06-257003-3）〔書庫，408¦¦BU　10100，000175502〕

［４］『図解　微分・積分が見る見るわかる』（岡部恒治，2002 年２月，サンマーク出版，￥1,680，ISBN：4-7631-9426-7）〔所蔵なし〕

［５］『図解雑学　マンガでわかる微分・積分』（大谷隆一，ナツメ社，2003 年１月，￥1,050，ISBN：4-8163-3008-9）〔所蔵なし〕

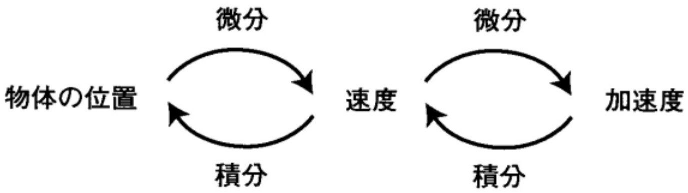


図　物体の位置と加速度の関係（出典：参考文献［１］，p.13）

→次ページ以降も，出典は，参考文献［１］。

環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

01 ボールは落ちる

ニュートンはその著作「プリンキピア」によって、それ以前のガリレイやフック等による科学的知識を集大成した、という人がいるが、これは適切なとらえ方と言えない。集大成ではなく新しい体系の創出であった。

運動について言えば、次の3つの法則を大前提にして、ガリレイやケプラー等の経験的な法則を導くことができる（31ページ参照）。

（第1法則）物体に力が働いていなければ、その物体は一直線上を同じ速さで動き続ける。

（第2法則）物体の運動に際して、その質量 m と、ある時刻における加速度 α との積は、その時刻に働いている力 f に等しい。
つまり　$f=m\alpha$
なお一般的には力と加速度はベクトルで、$\vec{f}=m\vec{\alpha}$ と表される。

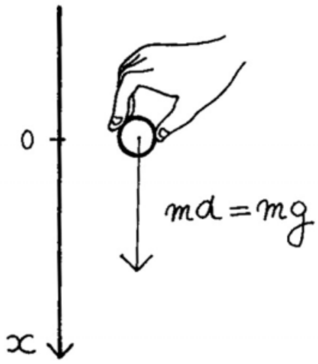
（第3法則）作用と反作用は大きさが等しく、方向が逆である。

第1法則は「慣性の法則」といわれ、第3法則は「作用反作用の法則」とよばれている。第1法則は第2法則の特殊な場合で、第3法則は力そのもののあり方を述べているとみることができる。したがって、運動の法則といえば、第2法則を指すと思ってよい。

さて、地球上でボールをそっと落とす場合を考えよう。

環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

ボールに働く重力の強さ f は、ボールの質量のみに比例すると考えてよいから、比例定数を g とすると $f=mg$ であり、第2法則から $\alpha=g$、つまり



$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=g \qquad (*)$$

と書ける。これを、運動方程式（もっと一般的には微分方程式）といい、この式から v や x を求めることを、運動方程式（あるいは微分方程式）を解くという。

（＊）を解くには、両辺を積分して

$$v=\frac{dx}{dt}=gt+v_0$$

これをさらに積分して

$$x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$$

とすればよい。

ボールを離す瞬間を $t=0$ とし、そのときの高さを原点にすれば（このような条件を初期条件という）、$v_0=0,\ x_0=0$であるから

$$x=\frac{1}{2}gt^2$$

となる。つまり、ガリレイの発見した式が導けてしまう。

〈補足〉g は重力の加速度で、地表では約9.8（m/sec^2）である。

なおニュートン以前の「運動量の法則」

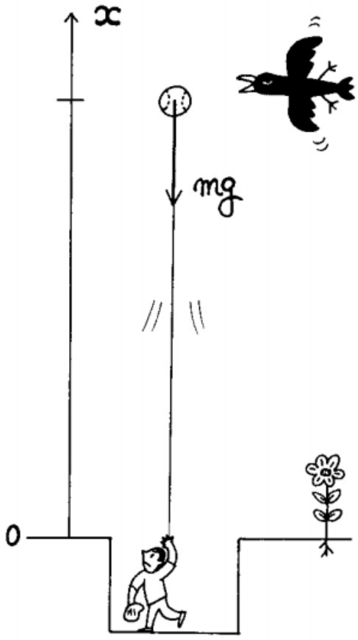
質量×速度の変化＝力×時間

は、平均的・近似的にしか成り立たないので、微分・積分の考えを取り入れないと、このように「微分方程式をたてて、それを解く」という方法にはつながらない。

環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

02 ボールを投げる

ボールを、真上に投げることを考えよう。今度は上方向をプラス、下方向をマイナスと考える。すると、投げあげられたボールには、下向きに重力が働く。その大きさは $m \times g$ で、符号はマイナスだから、ボールに働く力 f は $f=-mg$ で表される。ニュートン力学の第2法則 $f=m\alpha$ から（あるいは g が重力のひきおこす「加速度」であることから）、次の等式が成り立つ。



$$\alpha=\frac{d^2x}{dt^2}=-g \qquad (※)$$

これを解いて x（ボールの位置）を t（投げてからの時間）で表わしてみよう。

まず、※の両辺を t で積分すると

$$\frac{dx}{dt}=-gt+v_0$$

v_0 ― 初速（一定）

もう一度積分すると

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$$

x_0 ― 最初の位置

となる。投げた位置を基準にすると、$x_0=0$ だから

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

となる。

160

松坂投手が、ボールを初速150km/時で真上に投げたとする。

$150\text{km/時} = \frac{150000}{3600}\text{m/秒} \fallingdotseq 42\text{m/秒}$で、$g = 9.8\text{m/秒}^2$だから

$x = -4.9t^2 + 42t$　となる。

（1）何秒後に落ちてくるだろう？

$x = 0$ になる、t を求める $-4.9t^2 + 42t = 0$ より

$t(4.9t - 42) = 0$より　$t = \frac{42}{4.9} \fallingdotseq 8.6$

8.6秒後となる。

（2）最高点は何メートルの高さだろう？

上りと、下りの時間は同じだから　$t = \frac{8.6}{2} = 4.3$のときが最高点、よって $-4.9 \times (4.3)^2 + 42 \times 4.3 = 89.999 \fallingdotseq 90$メートル

なんと、90メートルまでいくのだ。もっとも空気抵抗なしとして。

〈補足〉ガリレイの法則だけでなく、ケプラーの法則もニュートン力学の3法則（と万有引力の法則）から導かれる——と言っても、「すでに知られている法則を導いただけじゃないか」と思う人たちもいる。しかしガリレイもケプラーも、過去の観測から、経験的に彼らの法則を導き出した。だから新しい問題についてきかれると、「では実験してみましょう」というほかない。ボールを投げあげるくらいなら何百回かやってみるのも悪くない。しかしロケットの打ち上げなどでは、そう何回もやってみるわけにはいかない。ニュートンの方法なら、ボールを1回も投げあげずに、理論的に上の結果を導くことができる。これが理論の強みである！

161